Liaison entre la fonction exponentielle et la fonction logarithme népérien :

Le dessin est fait à titre indicatif.

Quelques rappels sur la fonction exponentielle : (courbe bleue)

Domaine de définition : $\mathbb{R}$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$

La fonction e^x : $x \rightarrow y = e^x \rightarrow (x\,;\,y)$

Rappel : $e^0 = 1$

$e^1 = e \approx 2,718...$

Pour tout a et b $\in \mathbb{R}$: $e^a \times e^b = e^{a+b}$

$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$

$(e^a)^b = e^{a \times b}$

La fonction est bijective :

c'est-à-dire chaque abscisse a une seule ordonnée,

et chaque ordonnée a une seule abscisse.

Donc $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$

Et de même, $e^a > e^b \Leftrightarrow a > b$

$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

$\mathbf{(e^x)' = e^x}$

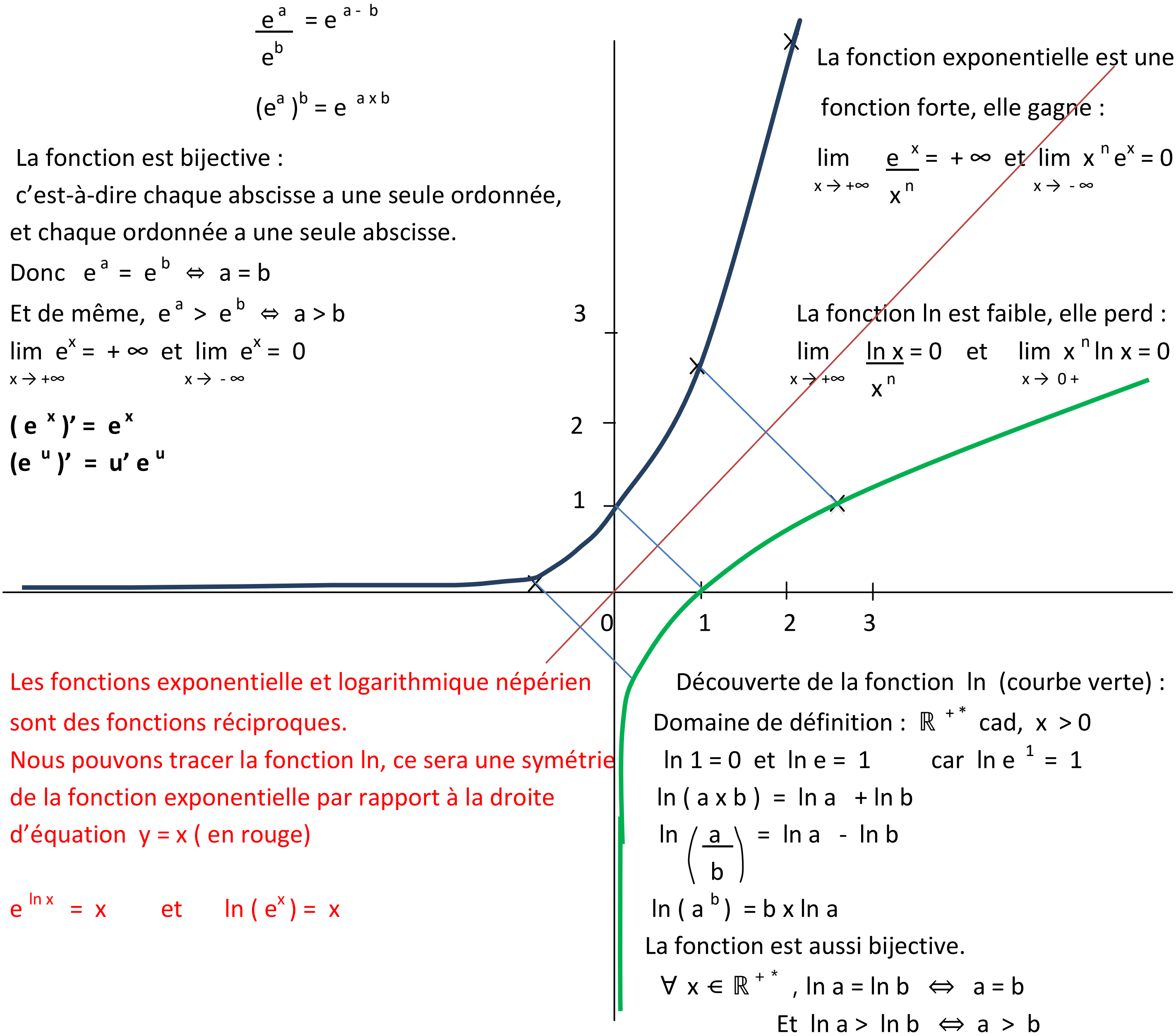
$\mathbf{(e^u)' = u' e^u}$

La fonction exponentielle est une fonction forte, elle gagne :

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$

La fonction ln est faible, elle perd :

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ et $\lim_{x \to 0+} x^n \ln x = 0$



Les fonctions exponentielle et logarithmique népérien sont des fonctions réciproques.

Nous pouvons tracer la fonction ln, ce sera une symétrie de la fonction exponentielle par rapport à la droite d'équation $y = x$ (en rouge)

$e^{\ln x} = x$ et $\ln(e^x) = x$

Découverte de la fonction ln (courbe verte) :

Domaine de définition : $\mathbb{R}^{+*}$ cad, $x > 0$

$\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$ car $\ln e^1 = 1$

$\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

$\ln(a^b) = b \times \ln a$

La fonction est aussi bijective.

$\forall\, x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$

Et $\ln a > \ln b \Leftrightarrow a > b$

$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{x \to 0+} \ln x = -\infty$

$\mathbf{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$ **et** $\mathbf{(\ln u)' = \frac{u'}{u}}$